**NÚMEROS COMPLEJOS**

Basado en Rojo, Álgebra I, pág. 351.

Álvarez, E.; Oliver, M. y Vecino, M. (2016) Temas de Álgebra. Euden Libros de Grado. Pág. 360.

**ARGUMENTO de un Número Complejo**















Aclaración



**Representaciones de números complejos en coordenadas polares**

Sea z = a + b i un número complejo representado en forma binómica utilizando coordenadas cartesiana.

Si denotamos con ρ (ro) al módulo del complejo z, ρ = | z |, y θ (thita) al argumento de z, θ = arg (z), entonces:

a = ρ cos θ y b = ρ sen θ

de donde:

**z = ρ (cos θ + i sen θ) Forma trigonométrica de un número complejo.**

**z = ( ρ , θ ) Forma polar de un número complejo.**

**Forma exponencial de un número complejo.**

Ejemplo: z = i

ρ = | z | = = 2

cos θ = o

Demás, como sen > 0 → → θ = arg (z) =

z, en forma trigonométrica, es: z = 2 ( cos + i sen ) forma trigonométrica

z= (2 , ) forma polar z = 2 forma exponencial

**Igualdad de números complejos en coordenadas polares**

Dados dos números complejos de la forma:

z = ρ (cos θ + i sen θ)

z´ = ρ´ (cos θ´ + i sen θ´)

z es igual a z´ si y sólo si tienen el mismo módulo y sus argumentos son congruentes módulo 2π.

z = z ´ ⇔ ρ = ρ´ y θ´ = θ + 2πk, con k ∈ Z

**OPERACIONES EN FORMA TRIGONOMÉTRICA**

**Multiplicación**

La multiplicación de números complejos en coordenadas polares es otro número complejo que tiene por módulo la multiplicación de los módulos de los complejos dados, y por argumento, la suma de los correspondientes argumentos.

Sean z = ρ (cos θ + i sen θ) y z´ = ρ´ (cos θ´ + i sen θ´)

z z´ = ρ (cos θ + i sen θ) ρ´ (cos θ´ + i sen θ´)

z z´ = ρ ρ´ [ (cos θ cos θ´ - sen θ sen θ´) + i (sen θ cos θ´ + cos θ sen θ´)]

z z´ = ρ ρ´ [cos (θ + θ´) + i sen (θ + θ´)]

**División**

El cociente de dos números complejos no nulos, en coordenadas polares, es otro número complejo que tiene por módulo el cociente de los módulos de los complejos dados, y por argumento, la diferencia de los correspondientes argumentos.

Sean z = ρ (cos θ + i sen θ) y z´ = ρ´ (cos θ´ + i sen θ´)

Si

Por igualdad de números complejos:

si k = 0,

Ejemplos: Resuelva las operaciones indicadas en cada caso:

a) (cos 45° + i sen 45°) (cos 135° + i sen 135°) = ( cos 180° + i sen 180°)

b) (cos 120° + i sen 120°) : (cos 60° + i sen 60°) = (cos 60° + i sen 60°)

**Potenciación de números complejos**

**Teorema de De Moivre**

Sea z = ρ (cos θ + i sen θ) un número complejo, n un número entero, n > 0:

81 (cos 180° + i sen 180°)

Demostración: sea z = ρ (cos θ + i sen θ)

Se quiere demostrar que

Por recurrencia sobre n

Si n = 1

ρ (cos θ + i sen θ) = ρ (cos θ + i sen θ) **se verifica**

Si n = h

**es verdadera por H. I.**

Si n = h + 1

**se debe justificar que es verdadera**.

Para ello, partiendo de la hipótesis inductiva, que es verdadera, multiplicamos miembro a miembro por z:

igualdad verdadera

Si se compara ésta última expresión con la dada en el paso n = h +1, vemos que coinciden, por lo tanto, esa expresión es verdadera.

Queda demostrado el Teorema.

Ejemplo: =

**Radicación de números complejos**

Por definición de radicación, para que ω ∈ C, sea raíz n-ésima de z:

**Todo número complejo no nulo admite n raíces n-ésimas distintas, dadas por:**

**Sea z = ρ (cos θ + i sen θ)**

**Con k = 0, 1, 2 , … , n – 1**

Demostración

y

Como:

Por igualdad de números complejos:

→

→

Ejemplo: raíz sexta de 1. =

